

• 研究简报 •

齐次函数的极限不存在的判定方法

王明金* 张淑芳
(大连大学) (基础部)

摘 要 本文阐明二重极限与二次极限的不确定关系, 给出齐次函数的极限不存在的判定方法.

关键词 二重极限; 二次极限; 齐次函数; 罗必塔法则

中图分类号 O171

The Determination Methods to the Nonexistence of the Odd Function's Limit

Wang Mingjin Zhang Shufang
(Dalian University) (Department of Basic Courses)

Abstract The uncertain relationship between the double limit and the quadratic limit is explained and the determination methods to the nonexistence of the odd function's limit are given.

Key words double limit; quadratic limit; odd function; L'Hospital law

1 问题的提出

1) 讨论 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$

显然点 $P(x, y)$ 分别沿坐标轴、直线 $y = kx$ 趋于原点的极限和两个二次极限都是零. 但是

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{(x+y)(\sqrt{xy+1}+1)}$$

因为 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{\sqrt{xy+1}+1} = \frac{1}{2}$, 而

收稿日期: 1995-04-03

* 王明金: 1940年生, 男, 副教授, 大连 116012

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = -x + kx^2}} \frac{xy}{x+y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + kx}{k} = -\frac{1}{k}$$

与 k 有关, 即 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x+y}$ 不存在. 由极限运算法则知二重极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$ 不存在.

2) 讨论 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$

显然点 $P(x, y)$ 分别沿坐标轴、直线 $y = kx$ 趋于原点的极限和两个二次极限都是 1. 但是

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1+xy)^{\frac{1}{x+y}} = e^{\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{x+y} \ln(1+xy)}$$

因为 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1+xy)}{x+y} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x+y}$ 不存在. 由极限运算法则知二重极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} (1+xy)^{\frac{1}{x+y}}$ 不存在.

通过上面两个二重极限问题的讨论, 如果点 $P(x, y)$ 以某些特殊方式(沿定直线或定曲线)趋于 $P_0(x_0, y_0)$ 时, 即使函数无限接近于某一确定值, 也不能由此断定函数的极限存在. 尤其是两个二次极限存在且相等, 仍不能由此断定二重极限存在. 值得注意的是两个二次极限不存在, 而二重极限有可能存在. 如

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$$

由于 $\sin \frac{1}{y}$ 在 $y = 0$ 和 $x = 0$ 的函数极限不存在, 故在点 $(0, 0)$ 的两个二次极限

$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$ 和 $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ 都不存在. 但因 $|f(x, y)| \leq |x| + |y|$, 故

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$$

以上讨论说明二次极限存在与否和二重极限存在与否, 二者之间没有确定关系. 只有当 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ 、 $\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ 和 $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ 都存在, 则三者都相等. 显然

$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y)$ 和 $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ 存在但不相等, 则 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ 必不存在.

在上述讨论中, 点 $P(x, y)$ 是以不同方式趋于 $P_0(x_0, y_0)$ 时, 函数 $f(x, y)$ 趋于不同的值, 并由此断定二重极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ 不存在. 但是这种方式如何选取却是一个难题.

2 齐次函数的极限

2.1 零次齐次函数的极限

定理 1 设 $f(tx, ty) = f(x, y)$, 当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时 $f(x, y)$ 是未定型 “ $\frac{0}{0}$ ”, 则当 (x, y) 沿直线 $y = kx$ 趋于 $(0, 0)$ 时, 函数 $f(x, y)$ 的极限与 k 有关.

证明 因 $f(tx, ty) = f(x, y)$, 即 $f(x, y)$ 是零次齐次函数. 取 $t = \frac{1}{x}$, 则

$f(tx, ty) = f(1, \frac{y}{x})$, 若令 $k = \frac{y}{x}$, 则 $f(x, y) = f(1, k)$ 与 k 有关. 当 (x, y) 沿直线 $y = kx$ 趋于 $(0, 0)$ 时, 函数 $f(x, y)$ 的极限与 k 有关.

例 1 讨论 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ 的存在性

解 令 $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, 显然 $f(tx, ty) = f(x, y)$, 即 $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ 是零次齐次函数. 当点 (x, y) 沿直线 $y = kx$ 趋于 $(0, 0)$ 时, 而

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot kx}{x^2 + k^2 x^2} = \frac{k}{1 + k^2}$$

与 k 有关, 故 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ 不存在.

2.2 可化为零次齐次函数的极限

定理 2 设 $f(t^m x, t^n y) = f(x, y)$, $m > 0, n > 0$, 当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时 $f(x, y)$ 是未定型“ $\frac{0}{0}$ ”, 则当 (x, y) 沿曲线 $y = kx^{\frac{n}{m}}$ 趋于 $(0, 0)$ 时, 函数 $f(x, y)$ 的极限与 k 有关

证明 因 $f(t^m x, t^n y) = f(x, y)$, 即 $f(x, y)$ 可化为零次齐次函数. 取 $t = x^{-\frac{1}{m}}$, 则 $f(t^m x, t^n y) = f(1, yx^{-\frac{n}{m}})$; 若令 $k = yx^{-\frac{n}{m}}$, 则 $f(x, y) = f(1, k)$ 与 k 有关, 当 (x, y) 沿曲线 $y = kx^{\frac{n}{m}}$ 趋于 $(0, 0)$ 时, 函数 $f(x, y)$ 的极限与 k 有关.

例 2 讨论 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ 的存在性

解 令 $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$, 显然 $f(tx, ty) \neq f(x, y)$. 但是 $f(tx, t^2 y) = f(x, y)$, 即 $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ 可化为零次齐次函数, 其中 $m = 1, n = 2$, 当点 (x, y) 沿抛物线 $y = kx^2$ 趋于 $(0, 0)$ 时, 而

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx^2}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot kx^2}{x^4 + k^2 x^4} = \frac{k}{1 + k^2}$$

与 k 有关, 故 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ 不存在.

2.3 非零次齐次函数的极限

命题 设 $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$, n 为正整数. 当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时 $f(x, y)$ 是未定型“ $\frac{0}{0}$ ”, 则当 (x, y) 沿曲线 $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ 趋于 $(0, 0)$ 时, 函数 $f(x, y)$ 的极限与 a_i ($i = 0, 1, \cdots, n$) 有关.

例 3 讨论 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x + y}$ 的存在性

解 令 $F(x, y) = \frac{xy}{x + y}$, 而 $F(tx, ty) = tF(x, y)$. 即 $F(x, y) = \frac{xy}{x + y}$ 是一次齐

次函数. 当 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, $F(x, y)$ 是未定型“ $\frac{0}{0}$ ”.

先设 $y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad (1)$$

由罗必塔法则知

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=f(x)}} \frac{xy}{x+y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{x+f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + xf'(x)}{1+f'(x)}$$

因分子 $f(x) + xf'(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$) 要使上式为未定式, 再设

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -1 \quad (2)$$

由罗必塔法则知

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + xf'(x)}{1+f'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f'(x) + xf''(x)}{f''(x)}$$

显然, 分子在 $x \rightarrow 0$ 时趋于 -2 , 要使其极限不存在, 只要

$$\lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = 2k \quad (3)$$

即

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=f(x)}} \frac{xy}{x+y} = \begin{cases} -\frac{1}{k}, & k \neq 0 \\ \infty, & k = 0 \end{cases}$$

让 $y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ 满足上述条件 (1), (2), (3), 得 $a_0 = 0, a_1 = -1, a_2 = k, a_3 = a_4 = \cdots = a_n = 0$. 当点 (x, y) 沿抛物线 $y = -x + kx^2$ 趋于原点 $(0, 0)$ 时, 而

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=-x+kx^2}} \frac{xy}{x+y} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(-x+kx^2)}{x+(-x+kx^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1+kx}{k} = -\frac{1}{k}$$

与 k 有关, 故 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x+y}$ 不存在.

由命题与罗必塔法则验证例 1 与例 2, 即两个极限与所选路径有关.

如例 1 讨论 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ 时选路径是直线 $y = kx$. 设 $y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ 并使

$$f(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0) \quad (4)$$

由罗必塔法则知

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=f(x)}} \frac{xy}{x+y} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x)}{x^2 + f^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + xf'(x)}{2x + 2f(x)f'(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) + f'(x) + xf''(x)}{2 + 2f'(x)f'(x) + 2f(x)f''(x)} \end{aligned}$$

若 $f'(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$), 则上式极限为 0, 设

$$f'(x) \rightarrow k \neq 0 \quad (x \rightarrow 0) \quad (5)$$

则上式极限为 $\frac{2k}{2+2k^2}$ 与 k 有关.

让 $y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ 满足 (4) 和 (5) 得 $a_0 =$

$0, a_1 = k$, 故选路径为直线 $y = kx$.

又如例2讨论 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$ 时选路径是 $y = kx^2$, 设 $y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, 并使

$$f(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0) \quad (6)$$

由罗必塔法则知

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=f(x)}} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f(x)}{x^4 + f^2(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) + 4xf'(x) + x^2 f''(x)}{12x^2 + 2f'^2(x) + 2f(x)f''(x)}$$

显然, 分子 $\rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$), 若 $f'(x) \rightarrow k \neq 0$, 则上式极限为 0;

设

$$f'(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow 0) \quad (7)$$

则上式极限为 “ $\frac{0}{0}$ ”, 由罗必塔法则

$$\begin{aligned} \text{上式} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6f'(x) + 6xf''(x) + x^2 f'''(x)}{24x + 6f'(x)f''(x) + 2f(x)f'''(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12f''(x) + 8xf'''(x) + x^2 f^{(4)}(x)}{24 + 6f''^2(x) + 8f'(x)f'''(x) + 2f(x)f^{(4)}(x)} \end{aligned}$$

若 $f''(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow 0$), 则上式极限为 0;

设

$$f''(x) \rightarrow 2k \neq 0 \quad (x \rightarrow 0) \quad (8)$$

则上式极限为 $\frac{24k}{24 + 24k^2} = \frac{k}{1 + k^2}$ 与 k 有关. 让 $y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ 满足 (6), (7), (8) 得 $a_0 = 0, a_1 = 0, a_2 = k$, 故选路径为抛物线 $y = kx^2$.

当 $P_0(x_0, y_0) \neq 0(0, 0)$ 时, 令 $x = x_0 + s, y = y_0 + h$, 则 $P(x, y) = P(x_0 + s, y_0 + h)$, 当 $s \rightarrow 0, h \rightarrow 0$, 则 $P(x, y) \rightarrow P(x_0, y_0)$. 故

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \lim_{\substack{s \rightarrow 0 \\ h \rightarrow 0}} f(x_0 + s, y_0 + h)$$

参 考 文 献

- 1 别尔曼著. 数学解析习题汇编. 北京: 高等教育出版社, 1957
- 2 复旦大学数学系主编. 数学分析. 上海: 上海科学技术出版社, 1960
- 3 同济大学数学教研室主编. 高等数学. 北京: 高等教育出版社, 1978
- 4 程其襄. 数学分析. 北京: 人民教育出版社, 1981