

• 研究简报 •

论求解临界荷载的方法

陈荣庚*

(水产土木工程系)

摘 要 介绍求解临界荷载的4种方法,对4种方法作了评述,提出在求解过程中应注意两类稳定性概念。

关键词 临界荷载;静力不稳定;动力不稳定

中图分类号 O317.2

About the Approach to the Computation of the Critical Load

Chen Ronggeng

(Department of Aquacultural Civil Engineering)

Abstract This paper introduces and reviews four different approaches to the computation of the critical load and proposes that two types of the stability concept should be taken into account in computation.

Key words the critical load; static instability; kinetic instability

传统上确定临界荷载有如下4种方法^[1],即缺陷法、静力法、能量法和动力法。本文运用这4种方法,求解弹性稳定性理论中两类重要问题即确定压柱的临界荷载和转轴的临界角速度,并对求解方法作了详细的分析和讨论,指出了求解过程中应注意的问题。

1 4种方法简介

1.1 压柱稳定性问题

(1) 缺陷法(不完善法)

图1所示压柱,作为一种不完善引进柱上端的偏心。根据平衡条件可得挠度曲线满

收稿日期:1994-03-23

* 陈荣庚:1960年生,男,讲师,博士研究生,大连116024

足微分方程

$$\begin{cases} y'' + k^2 y = -k^2 \frac{e}{l} x \\ y(0) = y(l) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

其中: $k^2 = P/EI$; EI 为压柱的弯曲刚度;

l 为压柱的长度; e 为偏心距.

方程 (1), (2) 的解为

$$y = \left(\frac{\sin kx}{\sin kl} - \frac{x}{l} \right) e$$

因为当 $kl \rightarrow m\pi$ 时, $y \rightarrow \infty$, 所以临界荷载为

$$P_{cr} = (\pi^2 EI)/l^2.$$

(2) 静力法 (平衡法、分支法)

静力法——列出微扰动的平衡方程将问题归结为微分方程的本征值问题. 上例中令 $e = 0$, 得挠度曲线满足的微分方程

$$\begin{cases} y'' + k^2 y = 0 \\ y(0) = y(l) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$y(0) = y(l) = 0 \quad (4)$$

其通解为

$$y = A \cos kx + B \sin kx$$

由 $y(0) = 0$, 得 $A = 0$, 由 $y(l) = 0$ 得 $B \cdot$

$\sin kl = 0$. 当

$$k_m l = m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

对任意的 B 值都满足 (5) 式, 这样就提供了

无限多个非平凡平衡位置. k_m 相应的 $P_m = (m^2 \pi^2 EI)/l^2$ 称为 m 阶欧拉临界荷载. 由前面的途径可知最低的临界荷载为 P_1 , 即 $P_{cr} = P_1 = (\pi^2 EI)/l^2$.

(3) 能量法

能量法是利用势能驻值条件确定临界荷载^[2]. 上例中, 系统的势能为

$$\begin{aligned} V &= V^{(i)} + V^{(e)} \\ &= \frac{EI}{2} \int_0^l (y'')^2 dx - \frac{P}{2} \int_0^l (y')^2 dx \end{aligned} \quad (6)$$

其中: $V^{(i)} = \frac{EI}{2} \int_0^l (y'')^2 dx$ 称为弯曲变形能;

$$V^{(e)} = \int_0^l (ds - dx) = -P \int_0^l (\sqrt{1 + (y')^2} - 1) dx = -\frac{P}{2} \int_0^l (y')^2 dx \text{ 称为外力功.}$$

令

$$\delta V = EI \int_0^l y'' \delta y'' dx - P \int_0^l y' \delta y' dx = 0$$

分部积分两次得

$$\delta V = \int_0^l (EI y'''' + P y'') \delta y \cdot dx + EI y'' \delta y' \Big|_0^l = 0 \quad (7)$$

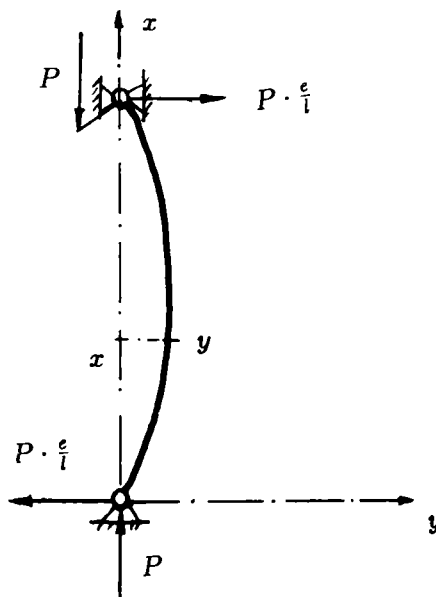


图1 偏心压柱受力图

由 $\delta y(x)$ 和 $\delta y'(x)$ 的任意性得如下微分方程

$$\begin{cases} y'''' + k^2 y'' = 0 & (8) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y''(0) = y''(l) = 0 & (9) \end{cases}$$

由这组方程可求得 $P_{cr} = P_1 = (\pi^2 EI)/l^2$.

(4) 动力法 (振动法)

动力法——利用系统受到微扰动后其位移和速度不超过预先规定的界限条件, 确定临界荷载. 上例中压柱的动力学方程为

$$\begin{cases} EI y'''' + P y'' + \rho \ddot{y} = 0 & (10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y''(0, t) = y''(l, t) = 0 & (11) \end{cases}$$

利用分离变量法可求得 (10) 式的通解为

$$y(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin \frac{m\pi x}{l} \cos(\omega_m t + \alpha)$$

由 (11) 式可得圆频率方程

$$\rho \omega_m^2 = \frac{m^2 \pi^2}{l^2} \left(\frac{m^2 \pi^2}{l^2} EI - P \right) \quad (12)$$

由 (12) 式可以看出, 随着荷载的增大, 圆频率将变小, 当荷载趋近其临界值时, 圆频率趋近于零. 因此, 保证运动收敛的最大荷载为 $P_1 = (\pi^2 EI)/l^2$. 故 $P_{cr} = P_1 = (\pi^2 EI)/l^2$.

1.2 非圆断面轴的临界转速问题

求临界角速度是稳定性理论中另一个重要的问题, 图 2 所示非圆断面轴, 设 m 为固定在轴上的盘的集中质量. C_1, C_2 为该轴相对于两个主方向的刚度系数 (该轴相对于两个主方向的刚度简化为两个线性恢复力 $C_1 x, C_2 y$ 表示).

(1) 动力法

由质点相对运动动力学方程可得

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega \dot{y} + \left(\frac{C_1}{m} - \omega^2\right)x = 0 & (13) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{y} + 2\omega \dot{x} + \left(\frac{C_2}{m} - \omega^2\right)y = 0 & (14) \end{cases}$$

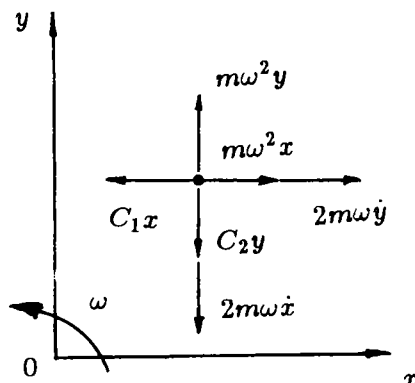


图 2 非圆断面轴受力图

不妨设 $C_1 > C_2$, 由相应的非平凡解满足的特征方程可解得: 当 $\omega^2 < C_1/m$ 或 $\omega^2 < C_2/m$ 时系统是稳定的; 当 $C_1/m < \omega^2 < C_2/m$ 时, 系统是不稳定的.

(2) 能量法

系统的势能

$$V = \frac{1}{2}[(C_1 - m\omega^2)x^2 + (C_2 - m\omega^2)y^2]$$

显然当 $C_1 > m\omega^2$, 并且 $C_2 > m\omega^2$ 时, V 正定, 系统的运动是稳定的.

(3) 静力法和不完善法

对于情况 (1) 中的特征方程有零根, 即 $\omega_1^2 = C_1/m$, $\omega_2^2 = C_2/m$.

2 结果讨论

1) 求解临界荷载的每一种方法都以某一个特定问题为特征.

(a) 缺陷法 当荷载取什么值, 不完善系统的静力位移变得过大, 甚至无穷大?

(b) 静力法 荷载取什么值时, 系统允许有非平凡的平衡位置?

(c) 能量法 荷载取什么值, 使得系统的势能不再正定?

(d) 动力法 荷载取什么值, 使得系统在平衡位置邻域内的自由振动不再有界?

2) 缺陷法、静力法和能量法是以静力概念为基础的, 而动力法是按动力学的途径. 对于压柱的临界荷载而言, 这 4 种方法给出相同的值, 但其中某些方法 (缺陷法和能量法) 直接给出临界荷载, 而静力法得到无限多个临界值, 临界荷载是其中的最小值. 由动力学途径得到 $P > P_{cr}$ 时系统不再是稳定的, 但不完善法和平衡法就不能得出如上结论.

3) 对例 2 通过实验发现, 由动力学途径计算出的临界角速度是正确的, 而其它 3 种方法得出的结论是不全面的或错误的. 事实上, 系统中的集中质量 m 相对于非惯性系运动, 受到科氏惯性力的作用, 而科氏惯性力在实位移上作的功恒等于零, 故势能表达式中不会出现. 即势能法求出的结果, 没能真实地、全面地反映系统的受力情况. 而平衡法和不完善法只是给出了不稳定区域的两个边界, 对边界之间不能给出任何信息.

4) 在例 2 中, 若令 $C_1 = C_2 = C$, 它对应于具有单一弯曲刚度的完善系统情形 (如圆轴). 此时动力学方程为

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} = 0 \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} = 0 \end{cases}$$

其通解为

$$\begin{cases} x = A\cos 2\omega t + B\sin 2\omega t + D \\ y = -A\sin 2\omega t + B\cos 2\omega t + E \end{cases}$$

这个解为有界的, 即动力法给不出临界值. 但从能量法可得 $\omega > C/m$ 是临界的. 平衡法和缺陷法给出 $\omega_{cr} = C/m$ 为唯一的临界角速度. 实验结果证明 ω_{cr} 是唯一的临界值. 此例说明, 若不考虑系统的缺陷, 动力学方法可能失效.

3 结论

通过上面的分析, 得出在求解临界荷载时应注意以下几点

1) 稳定性概念有两类. 一个是对某一 P 值的位移变得过大甚至无穷大, 称为系统的静力不稳定性. 这种效应通常是由于系统的不完善性引起的; 另一个是在实际问题中不可避免的扰动引起运动中位移变得过大甚至无穷大, 这种情形称为平衡的不稳定, 也称为动力不稳定性. 对于实际存在的不稳定性问题, 原则上应同时考虑两方面的原因, 才能得到合乎实际的结论.

2) 一般动力学方法得出的结论包含平衡法和能量法的结果. 但若忽略系统的不完善性, 即使动力学方法也可能失效. 这说明稳定性问题, 对微小因素的影响是很重要的, 不能随意忽视. 在采用动力学方法时, 应注意系统潜在的不完善性.

3) 总之, 在采用上述 4 种方法时, 应重视两类不同的稳定性概念, 应注意系统的受力特点, 特别是采用能量法时, 应注意是否存在无功的反作用力, 若忽视它的存在将会得出错误的结论.

参 考 文 献

- 1 费志中. 弹性稳定. 北京: 煤炭工业出版社, 1987
- 2 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用. 北京: 科学出版社, 1981