·研究简报·

确定初始调运方案的避高就低法

王秀芝* 孙宝英
(基础部) (山东德州渔业局)

摘 要 本文针对平衡运输问题，提出一种求初始调运方案的新方法，称做避高就低法，同时给出了有关定理及其证明，并把该方法与最小元素法等其他方法进行了比较说明，最后以实例验证．结果表明，避高就低法比较好.

关键词 平衡运输问题；单位运价；调运量；运输表

中图分类号 O22.1

The Process of Assigning the Initial Transport Plans

Wang Xiuzhi Sun Baoying
(Department of Basic courses) (Shan Dong Dezhou Fishery Bureou)

Abstract For the transportation problem of the total suppply equals the total demand, This article proposes the new method for obtaining a reasonably good starting basic feasible solution. Its basic rule is that among those rows (or columns) of the C_{ij} matrix at hand, select the one with highest cost in the matrix. Identify the lowest cost unallocated cell in the selected row (or column) and allocate as much as possible to the X_{ij} with this cell. Repeat the process of assigning a variable X_{ij} until all supplies and demands are allocated. So that not only the low cost can be selected, but also the highest cost can be avoided. therefore the new method, which reduces the computational quantity for the process of finding the optimal shipment pattern has clear superiorities over the matrix minimum method for some questions.

Key words balance transportation problem; unit cost for transportation; transport quantity; transportation tableau

---

收稿日期：1994-04-04

* 王秀芝：1943年生，女，讲师，大连 116024

运输问题初始调运方案的确定方法，迄今广为人知的有：西北角法，最小元素法，比较差额法[1].

西北角法简便易行，但由于它不考虑运价的高低，而往往致使求得的初始调运方案，需经多次调整[2]，才能获得最优方案. 最小元素法是取低运价优先供应，其缺点是常常到最后却不得不供应最高或较高运价的收点，所以总运费仍然偏高. 比较差额法弥补了最小元素法的不足，即照顾到了就低避高两个方面，可它较繁琐，应用起来不太方便.

鉴于上述原因，著者探索出一种不仅能就低，并且能避高，又比较易行的新方法，即本文要具体交待的确定初始调运方案的避高就低法. 它的基本规则是：对 C_{ij} 阵的最大元素所在行（或列）的最低运价相应收点优先供应（最小元素法是对 C_{ij} 阵的最低运价相应收点优先供应）.

1 避高就低法的主要步骤

1） 把已知的实际问题，以其对应的平衡运输表示出来. 表中调运量 X_{ij} 的位置先都空着，待逐步定出基变量的数值而填之.

2） 先给表上含 C_{ij} 阵最大元素的行（此时 $m < n$；如果 $m > n$ 可以先考虑列；如果 $m = n$ 时，可以视具体情况，选行或列）中最低运价对应的变量 X_{ij} 确定尽可能大的数值，即令 $X_{ij} = \min(a_i, b_j)$，然后把确定的 X_{ij} 值填入相应的格 (i, j) 中.

a. 假设含 C_{ij} 阵最大元素的行不唯一，则先在含 C_{ij} 阵最大元素的所有行中选择一个最低运价，再给其对应的变量 X_{ij} 确定尽可能大的数值，并填入相应的格子中.

b. 假设含 C_{ij} 阵最大元素的行中的最低运价不止一个，则用各个最低运价减去其各自所在列的其余元素中的最小元素，比较所得差，而先给最小的差对应的最低运价格填上变量 X_{ij} 的数值.

3） 给填数的格所在行（当该行供应完毕时）或所在列（当该列需求满足时）的其余变量的格子都打上×.

注意：即使填数的格所在行和列的供求同时满足了，也只能在行和列之一的其余变量的格子处打上×.

从步骤 3) 不难看出，确定一个变量的数值，在其对应的格上填了一个数之后，就等价于从表中划去了一行（或一列），即行数与列数之和减少 1.

为了后面的定理证明需要，特在此规定：表中只剩下一行（或一列）时，不准划去行，只准划去列（或不准划去列，只准划去行）.

4） 对没有填数和没有打×的地方，即在缩减后的表中重复步骤 2)、3)，直至继续到只剩下一行（或一列）时，若此行（或列）还有空格，则只准在空格中填数，如果供求已满足，就在空格中填 0 代之（且不准打×）. 一个空格也没有了，步骤停止.

于是便获得一组变量值，可以证明表上填数的变量是基变量，有×格子对应的变量是非基变量.

定理 用避高就低法确定出的调运方案是运输问题的一个基本允许解.

证明 以上述步骤确定的一组变量值，其中打×处变量实际是取零，显然满足运输问题的约束方程组，即这组变量值（也称初始调运方案），是运输问题的允许解.

下面证明它是基允许解，为此，先证明填数的格一定是 $m+n-1$ 个. 我们从避高就低法的实施过程及其规定中已知，有一个填数的格，行数与列数之和就减少 1，如果表上有 $m+n-2$ 个填数的格，则行数与列数之和就减少 $m+n-2$，即 $m+n-(m+n-2)=2$ 为剩下的行数与列数之和，这时显然表上还剩一个空格，且只准填数，所以填数格子应该是 $m+n-2+1=m+n-1$ 个.

再来证明这 $m+n-1$ 个格对应的变量集合不包含闭回路. 用反证法，假设这 $m+n-1$ 个变量含有 4 个顶点 $X_{i_1j_1}$、$X_{i_1j_2}$、$X_{i_2j_2}$、$X_{i_2j_1}$ 的闭回路，今根据避高就低法给 X_{ij} 定数的步骤原则，却推出有一个顶点，根本不可能确定数值. 请看，假设 $X_{i_1j_1}$ 给定了数值，划去的是第 i_1 行→ $X_{i_1j_2}$ 必比 $X_{i_1j_1}$ 先定数值，且划去的一定是第 j_2 列→ $X_{i_2j_2}$ 必比 $X_{i_1j_2}$ 先定数值，且划去的是第 i_2 行→ $X_{i_2j_1}$ 必先比 $X_{i_2j_2}$ 确定数值，且划去的一定是第 j_1 列→ $X_{i_2j_1}$ 定数后，第 j_1 列已没空格，又这 4 个顶点定数值的先后次序是 $X_{i_2j_1}\to X_{i_2j_2}\to X_{i_1j_2}\to X_{i_1j_1}$ 所以 $X_{i_1j_1}$ 不可能确定数值，这与假设 $X_{i_1j_1}$ 给定了数值矛盾，即证明了这 $m+n-1$ 个变量不包含 4 个顶点的闭回路. 同理可证，这 $m+n-1$ 个变量集合也不包含 6 个、8 个，…顶点的闭回路. 此说明这 $m+n-1$ 个变量是基变量，故所得一组变量 X_{ij} 值也是基本允许解.

因为避高就低法是从 C_{ij} 阵最大元素的行（列）最小运价的格开始的，而后做法所遵循的原则与西北角法、最小元素法没有区别，故上述证明参考了［3］中的相应部分.

2　避高就低法的应用实例

例 1　设有某物资要从 A_1，A_2，A_3 调往 B_1，B_2，B_3，B_4，其对应条件以表 1 示出，求最优调运方案.

解　表 1 中粗体数字是用避高就低法确定的调运量数，其填入顺序是 $X_{13}\to X_{11}\to X_{21}\to X_{24}\to X_{32}\to X_{34}$. 这样获得的初始调运方案，经用闭回路法检验而知，即是最优方案.

表 1

发点	收点				发量 a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3）**2**	11）×	3）**5**	12）×	**7**
A_2	1）**1**	9）×	2）×	8）**3**	4
A_3	7）×	4）**6**	10）×	5）**3**	9
收量 b_j	3	6	5	6	20

为明确起见，在此结合例 1 对避高就低法的使用过程重点说明如下：因为表 1 最大的 C_{ij} 是 $C_{14}=12$，其所在行的 $C_{11}=C_{13}=3$ 最小，故根据步骤 2）及其 b 先定 X_{13} 的值，即令 $X_{13}=\min(7,5)=5$，在格（1，3）处填上 5，并在格（2，3）、(3，3）处打上×. 然后看缩减后的（即认为划去第 3 列的）表，其最大的 C_{ij} 仍是 $C_{14}=12$，它所在行的 $C_{11}=3$ 最小，于是令 $X_{11}=\min(7-5,3)=2$ 填在格（1，1）中，并在格（1，2)、(1，4）处打上×. 再在认为划去第 3 列、第 1 行的表中重复上述步骤得 $X_{21}=\min(4,3-2)=1$. 同理可得 $X_{24}=3, X_{32}=6, X_{34}=3$.

例 2　调运某物资的具体条件如表 2 所示，求最优调运方案.

解　用避高就低法依次确定的调运量是 $X_{13}\to X_{11}\to X_{21}\to X_{24}\to X_{32}\to X_{34}$. 经用闭回路法检验知表 2 示出的初始调运方案，也是最优方案.

表 2

发点	收点				发量 a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6) **4**	20) ×	6) **10**	20)	14
A_2	2) **2**	18)	4) ×	16) **6**	8
A_3	10) ×	8) **12**	20) ×	10) **6**	18
收量 b_j	6	12	10	12	40

表 2 中最大的 C_{ij} 是 $C_{12}=C_{14}=C_{33}=20$，其所在行不唯一，是两行，则根据 2）的 a 先在第 1 行考虑，因为这两行所有运价中最小的是 6 在第 1 行. 而第 1 行的最小运价（是 $C_{11}=C_{13}=6$）又不止一个，这在例 1 中见过，属 2）的 b. 通过比较 $C_{11}-2=4$ 与 $C_{13}-4=2$ 这两个差，其最小的差 2 对应的是 C_{13}，故决定先从 X_{13} 开始定值，即有 $X_{13}=\min(14,10)=10$.

以上两例的共同特点是所确定的初始调运方案等于最优方案. 经多次实践用本文提出的避高就低法求得的初始调运方案，多数不需调整或稍作调整，就能获得最优方案. 可以说，此法不仅适用于一切平衡运输问题，并且在一般情况下（个别问题除外），在减少求优过程的计算量方面是优于其他方法的.

当然，也有个别问题，如表 3 所示的运输问题，用避高就低法反倒不如使用最小元素法好.

表 3

发点	收点				发量
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	9)	10)	11)	12)	7
A_2	1)	6)	7)	8)	10
A_3	2)	3)	4)	5)	3
收量	11	6	2	1	20

因为这表中最高运价行的最低运价比其所在列的最低运价高得太多，乃至比其余行的最高运价还高. 诸如此类问题，使用避高就低法确定的初始调运方案，不能使总运费大幅度地减少，则可考虑选用其他方法.

注： 以上各表的格中左上角加半括号的数字为单位运价，即 C_{ij} 的值.

参 考 文 献

1 黄玉喜. 现代管理数学基础：下册. 河南：科学技术出版社，1985
2 中国人民大学数学教研室编. 线性规划. 北京：中国人民大学出版社，1985
3 管梅谷，郑汉鼎. 线性规划. 山东：科学技术出版社，1983